第二章 一元二次函数、方程和不等式

模块一 不等式与二次函数（★★）

强化训练

类型Ⅰ：不等式的性质

1．（2023·广东湛江模拟·★）（多选）下列结论正确的是（　　）

（A）若 $a>b$，则 $ac>bc$

（B）若 $a>b>0$，则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

（C）若 $ac^2>bc^2$，则 $a>b$

（D）若 $a<b$，则 $a^2<b^2$

答案：BC

解析：A 项，c 的正负不确定，当 $c\le 0$ 时，$ac\le bc$，故 A 项错误；

B 项，要比较 $\frac{1}{a}$ 和 $\frac{1}{b}$，可作差来看，$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}$，因为 $a>b>0$，所以 $b-a<0$，$ab>0$，

故 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}<0$，所以 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，故 B 项正确；

C 项，若 $ac^2>bc^2$，则 $c\ne 0$，所以 $c^2>0$，从而 $a>b$，故 C 项正确；

D 项，当 $a<b$ 时，$a^2<b^2$ 可能不成立，例如取 $a=-2$，$b=-1$，满足 $a<b$，但 $a^2=4>b^2=1$，故 D 项错误.

2．（2023·全国模拟·★★）（多选）已知 a，b，c，d 均为实数，则下列命题正确的是（　　）

（A）若 $a>b$，$c>d$，则 $a-d>b-c$

（B）若 $a>b$，$c>d$，则 $ac>bd$

（C）若 $a>b$，$c>d>0$，则 $\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$

（D）若 $ab>0$，$bc-ad>0$，则 $\frac{c}{a}>\frac{d}{b}$

答案：AD

解析：A 项，结论中 d 和 c 前面都有负号，故在 $c>d$ 两端乘以 -1，

因为 $c>d$，所以 $-c<-d$，即 $-d>-c$，又 $a>b$，由同向不等式的可加性得 $a-d>b-c$，故 A 项正确；

B 项，同向同正的不等式才能相乘，B 项只满足同向，没有同正，故不对，下面举个反例，

取 $a=2$，$b=1$，$c=-2$，$d=-3$，满足 $a>b$，$c>d$，但 $ac=-4<bd=-3$，故 B 项错误；

C 项，$\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$ 可以看成 $a\cdot\frac{1}{d}>b\cdot\frac{1}{c}$，由 $c>d>0$ 可以得到 $\frac{1}{d}>\frac{1}{c}>0$，但 $a>b$ 中没规定 a，b 都为正数，不满足同向同正可乘的条件，所以 C 项不对，下面举个反例，

取 $a=-1$，$b=-2$，$c=2$，$d=1$，满足 $a>b$，$c>d>0$，但 $\frac{a}{d}=\frac{b}{c}=-1$，故 C 项错误；

D 项，由 $bc-ad>0$ 可得 $bc>ad$，又 $ab>0$，所以 $\frac{1}{ab}>0$，在 $bc>ad$ 两端同乘以 $\frac{1}{ab}$ 可得 $bc\cdot\frac{1}{ab}>ad\cdot\frac{1}{ab}$，

化简得：$\frac{c}{a}>\frac{d}{b}$，故 D 项正确.

3.（2022・吉林模拟・★★★）（多选）已知实数 a，b，c 满足 $a<b<c$，且 $a+b+c=0$，则下列不等关系正确的是（　　）

（A）$ac<bc$　　（B）$\frac{1}{ab}>\frac{1}{bc}$　　（C）$ab^2<cb^2$　　（D）$\frac{c-a}{c-b}>1$

答案： AD

解析： a,b,c 关系清晰，可先取特值看能否排除选项，

取 $a=-3$，$b=1$，$c=2$，经检验，$\frac{1}{ab}<\frac{1}{bc}$，排除 B 项，

再取 $a=-2$，$b=0$，$c=2$，经检验，$ab^2=cb^2$，排除 C 项，

多选题到此已可确定选 AD，下面也给出严格分析过程，观察选项发现要用 a,b,c 的正负情况，故先判断，

因为 $a<b<c$，$a+b+c=0$，所以 $\begin{cases}0=a+b+c<c+c+c=3c\\0=a+b+c>a+a+a=3a\end{cases}$，故 $c>0$，$a<0$，b 的正负均有可能，

A 项，因为 $a<b$，所以两端同乘以 c 可得 $ac<bc$，故 A 项正确；

B 项，由前面的分析可知 $\frac{1}{a}<0<\frac{1}{c}$，但 b 的正负不确定，所以 B 选项不对，下面举个反例，

取 $a=-3$，$b=1$，$c=2$，满足题干条件，此时 $\frac{1}{ab}=-\frac{1}{3}<\frac{1}{bc}=\frac{1}{2}$，故 B 项错误；

C 项，此选项是在 $a<c$ 两端乘以了 b^2，当 $b=0$ 时，结论就不成立了，

例如，取 $a=-1$，$b=0$，$c=1$，满足题设，但 $ab^2=cb^2=0$，故 C 项错误；

D 项，要比较 $\frac{c-a}{c-b}$ 与 1 的大小，可作差来看，$\frac{c-a}{c-b}-1=\frac{c-a-(c-b)}{c-b}=\frac{b-a}{c-b}$，

因为 $a<b<c$，所以 $b-a>0$，$c-b>0$，故 $\frac{c-a}{c-b}-1=\frac{b-a}{c-b}>0$，所以 $\frac{c-a}{c-b}>1$，故 D 项正确.

类型Ⅱ：二次函数、一元二次不等式

4.（2022・浙江舟山模拟・★）设 a，b 为常数，若关于 x 的不等式 $ax^2-x-3<0$ 的解集为 $(-1,b)$，则 $b=$ ______.

答案： $\frac{3}{2}$

解析：给出一元二次不等式的解集，可推知对应的一元二次方程的根，

因为 $ax^2-x-3<0$ 的解集为 $(-1,b)$，所以 $a>0$，且 -1 和 b 是方程 $ax^2-x-3=0$ 的两根，

由韦达定理，$\begin{cases}-1+b=\dfrac{1}{a}\\-1\times b=-\dfrac{3}{a}\end{cases}$，解得：$b=\dfrac{3}{2}$.

5.（2022 •安徽模拟 •★★）已知关于 x 的不等式 $(x-a)(x-2)>0$ 成立的一个充分不必要条件是 $-1<x<1$，则实数 a 的取值范围是（　　）

（A）$(-\infty,-1]$　　（B）$(-\infty,0)$　　（C）$[2,+\infty)$　　（D）$[1,+\infty)$

答案：D

解析：先求解 $(x-a)(x-2)>0$，a 与 2 的大小不确定，需讨论，

记 $(x-a)(x-2)>0$ 的解集为 A，$B=(-1,1)$，题干的条件等价于 B　A，

当 $a=2$ 时，$(x-a)(x-2)>0$ 即为 $(x-2)^2>0$，解得：$x\neq 2$，所以 $A=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$，满足 B　A；

当 $a>2$ 时，$(x-a)(x-2)>0\Leftrightarrow x<2$ 或 $x>a$，所以 $A=(-\infty,2)\cup(a,+\infty)$，如图 1，满足 B　A；

当 $a<2$ 时，$(x-a)(x-2)>0\Leftrightarrow x<a$ 或 $x>2$，所以 $A=(-\infty,a)\cup(2,+\infty)$，如图 2，要使 B　A，应有 $1\le a<2$；

综上所述，实数 a 的取值范围是 $[1,+\infty)$.

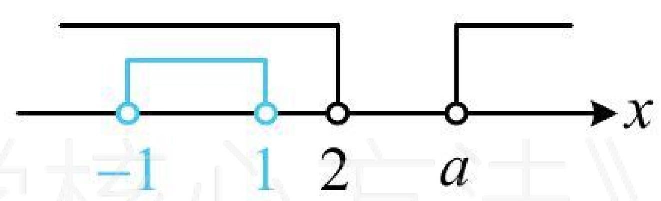


图1

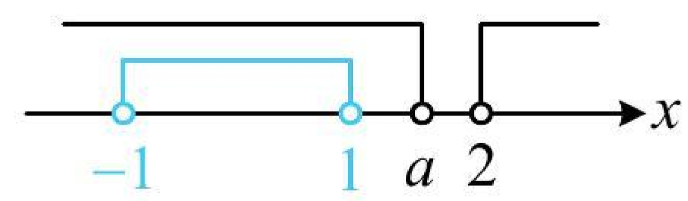


图2

6.（2023 • 江西模拟 • ★★）方程 $x^2-mx+1=0$ 在区间 $(-1,2)$ 上有根，则实数 m 的取值范围是_____.

答案：$(-\infty,-2)\cup[2,+\infty)$

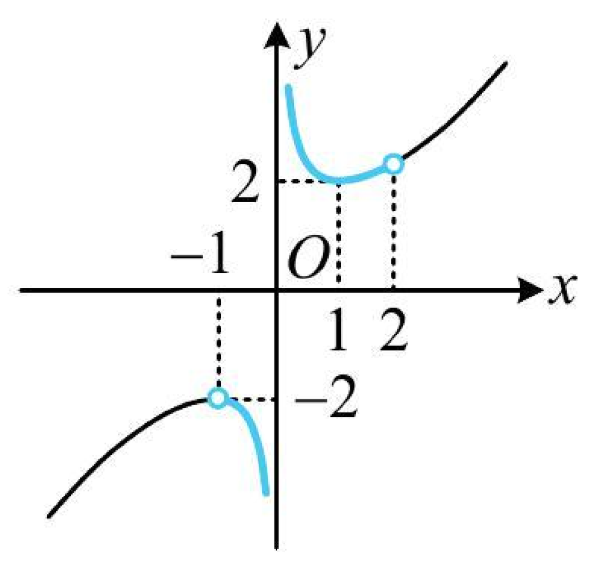
解析：只说有根，没规定几个根，考虑参变分离，$x^2-mx+1=0\Leftrightarrow mx=x^2+1$ ①，

接下来两端除以 x 即可分离出 m，但需考虑 $x=0$ 的情形，

当 $x=0$ 时，方程①不成立，所以 0 不是方程①的解；

当 $x\in(-1,0)\cup(0,2)$ 时，方程①等价于 $m=x+\dfrac{1}{x}$，函数 $y=x+\dfrac{1}{x}$ 的大致图象如图所示，

该函数在 $(-1,0)\cup(0,2)$ 上值域为 $(-\infty,-2)\cup[2,+\infty)$，所以 m 的取值范围是 $(-\infty,-2)\cup[2,+\infty)$.



7.（2023 • 四川绵阳模拟 • ★）关于 x 的一元二次方程 $ax^2+2x-1=0$ 有两个不相等的正根的充要条件是（　　）

（A）$a<-1$　　（B）$-1<a<0$　　（C）$a<0$　　（D）$0<a<1$

答案：B

解析：已经说了是一元二次方程，$a=0$ 就不考虑了，规定两根为正，用判别式+韦达定理即可，

设原方程的两根分别为 x_1，x_2，则 $\begin{cases}\Delta=4+4a>0(\text{保证有两根})\\ x_1x_2=-\dfrac{1}{a}>0(\text{保证两根同号})\\ x_1+x_2=-\dfrac{2}{a}>0(\text{保证两根只能同正})\end{cases}$，解得：$-1<a<0$.

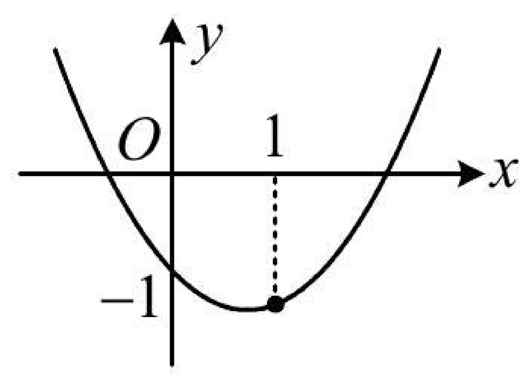
8.（2022·辽宁模拟·★★）若方程 $x^2+(2-m)x-1=0$ 在 $(1,+\infty)$ 上仅有 1 个实根，则 m 的取值范围是_____.

答案：$(2,+\infty)$

解析：规定了 $(1,+\infty)$ 上的实根个数，故考虑画二次函数的图象来看，

设 $f(x)=x^2+(2-m)x-1$，注意到原方程的 $\Delta=(2-m)^2+4>0$，所以原方程在 $\mathbf{R}$ 上必有两根，

结合 $f(0)=-1$ 知满足题意的 $f(x)$ 的大致图象只能为如图所示的情形，故 $f(1)=2-m<0$，解得：$m>2$.



9.（2022·四川成都七中模拟·★★★）（多选）关于 x 的方程 $x^2+(a-3)x+1=0$ 有两个不相等的大于 $\dfrac{1}{2}$ 的实数根的充分不必要条件可以是（　）

（A）$\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{3}{4}$　（B）$\dfrac{2}{3}<a<1$　（C）$\dfrac{1}{2}<a<1$　（D）$\dfrac{2}{3}<a\le 2$

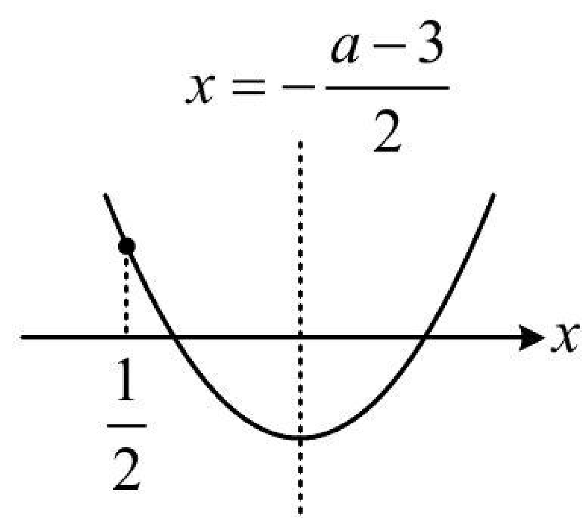
答案：AB

解析：规定了 $(\dfrac{1}{2},+\infty)$ 上根的个数为 2，故考虑画二次函数的图象来看，

设 $f(x)=x^2+(a-3)x+1$，若原方程有 2 个大于 $\dfrac{1}{2}$ 的实根，则 $f(x)$ 的大致图象如图，

所以 $\begin{cases}f(\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{4}+\dfrac{a-3}{2}+1>0\\ \Delta=(a-3)^2-4>0\\ \text{对称轴}x=-\dfrac{a-3}{2}>\dfrac{1}{2}\end{cases}$，解得：$\dfrac{1}{2}<a<1$，题干让选充分不必要条件，故选其真子集即可，

所以答案为 A 和 B.



10.（2022·四川广安模拟·★★★）若关于 x 的不等式 $x^2-2ax-7a^2<0$ 的解集为 (x_0,x_0+16)，则实数 $a=$

_____.

答案：$\pm 2\sqrt{2}$

解析：观察发现解集的端点都含参，但差值不变，故可由韦达定理求出$|x_1-x_2|$，从而建立方程求 a，

因为$x^2-2ax-7a^2<0$的解集为(x_0,x_0+16)，所以x_0和x_0+16是方程$x^2-2ax-7a^2=0$的两根，

记$x_1=x_0$，$x_2=x_0+16$，则由韦达定理，$\begin{cases}x_1+x_2=2a\\x_1x_2=-7a^2\end{cases}$，

所以$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{4a^2-4\times(-7a^2)}=4\sqrt{2}|a|$，

又$|x_1-x_2|=|x_0-(x_0+16)|=16$，所以$4\sqrt{2}|a|=16$，解得：$a=\pm 2\sqrt{2}$.

【反思】对于一元二次方程$ax^2+bx+c=0$，除两根之和、两根之积的韦达定理外，两根之差的绝对值$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$也需要掌握，它在解析几何中有广泛的应用.

11.（2023 • 湖南模拟 • ★★★）若函数$f(x)=ax^2+(2-a)x-2$在$(0,2)$上有且仅有 1 个零点，则实数 a 的取值范围是_____.

答案：$[-1,+\infty)\cup\{-2\}$

解析：平方项系数为字母，先讨论其等于 0 的情形，

当$a=0$时，$f(x)=2x-2$，由$f(x)=0$可得$x=1$，满足题意；

当$a\neq 0$时，$f(x)=0\Leftrightarrow ax^2+(2-a)x-2=0\Leftrightarrow x^2+\dfrac{2-a}{a}x-\dfrac{2}{a}=0$，问题等价于此方程在$(0,2)$上有 1 个实根，

设$g(x)=x^2+\dfrac{2-a}{a}x-\dfrac{2}{a}$，注意到$g(0)=-\dfrac{2}{a}\neq 0$，所以$g(x)$的图象有下面四种满足要求的情形，

若为图 1，则$\Delta=\dfrac{(2-a)^2}{a^2}+\dfrac{8}{a}=0$，解得：$a=-2$，

经检验，此时$g(x)=0$即为$(x-1)^2=0$，解得：$x=1$，满足题意；

若为图 2 或图 3，此时无需分别考虑，统一处理即可，只需$g(0)$和$g(2)$异号，

所以$g(0)g(2)=-\dfrac{2}{a}(4+\dfrac{4-2a}{a}-\dfrac{2}{a})<0$，整理得：$a+1>0$，故$a>-1(a\neq 0)$；

若为图 4，则$g(2)=4+\dfrac{4-2a}{a}-\dfrac{2}{a}=2+\dfrac{2}{a}=0$，解得：$a=-1$，此时$g(x)=x^2-3x+2$，

由$g(x)=0$可得$x=1$或 2，满足$g(x)$在$(0,2)$上有且仅有 1 个零点；

综上所述，实数 a 的取值范围是$[-1,+\infty)\cup\{-2\}$.

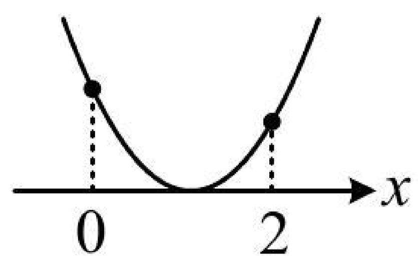


图1

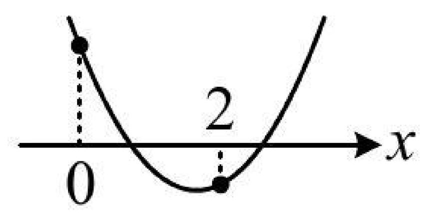


图2

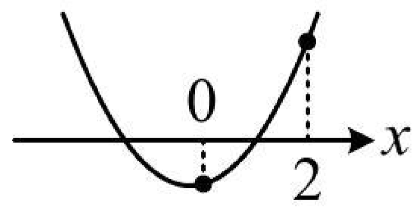


图3

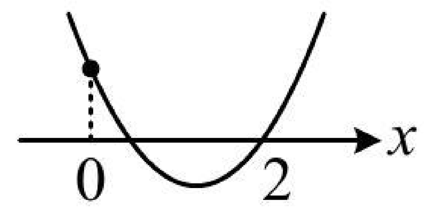


图4